3.6 解偏微分法(Partial Differential Equations Method)

給定初始值於選定之偏微分方程式，而求出初猜點。 再代入這些點，求出邊界值，然後再用內插或外差法求其邊界內的點，繼續重複這些動作直到收斂。

其求解的方法依不同的邊界條件情況分為解橢圓型(Elliptic)、拋物線型(Parabolic)與雙曲線型(Hyperbolic)三種方法。 以偏微分方程求解一區域內部之邊界值問題時，若邊界式完全封閉的，其偏微分方程式必為橢圓型偏微分方程式(Elliptic Equation)，否則即是拋物線型偏微分方程式(Parabolic)或雙曲線型偏微分方程式(Hyperbolic)方程式。

於卡式座標系中，最簡單的橢圓型方程式之格點座標的轉換即是以下的拉氏方程式(Laplace Equation):

$$\begin{cases} x_{xx} + x_{yy} + x_{zz} = 0 \\ h_{xx} + h_{yy} + h_{zz} = 0 \\ z_{xx} + z_{yy} + z_{zz} = 0 \end{cases} \tag{3-25}$$

由於以循環收斂方式求解橢圓型偏微分方程式時，致使內部格點呈均勻分佈，而有導致格線分佈於凹型邊界(Concave Boundary)附近稀疏、凸型邊界(Convex Boundary)附近密集的特性，不易控制網格的分佈。 將圖 2-2(c)的 O-Type 網格經解橢圓型偏微分法計算後之結果如圖 3.24 所示。

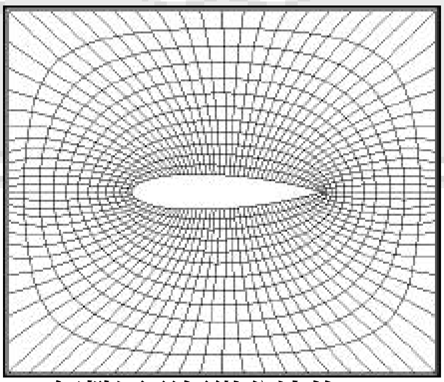

圖 3.24 解橢圓形偏微分法的 O-Type 網格

為了控制內部區域的格點分佈，加入控制參數之後，即成為以下的 Poisson Equation:

$$\begin{cases} x_{xx} + x_{yy} + x_{zz} = P(x,h,z) \\ h_{xx} + h_{yy} + h_{zz} = Q(x,h,z) \\ z_{xx} + z_{yy} + z_{zz} = R(x,h,z) \end{cases} \qquad \text{(3-26)}$$

其中P , Q , R 為控制方程式。

置換式中的x , h 及z 後

$$\begin{aligned} & g_{11}(x_{xx} + f x_x) + g_{22}(x_{xx} + y x_x) + g_{33}(x_{xx} + q x_x) + 2(g_{12} x_{xh} + g_{13} x_{hz} + g_{23} x_{zx}) = 0 \\ & g_{11}(y_{xx} + f y_x) + g_{22}(y_{xx} + y y_x) + g_{33}(y_{xx} + q y_x) + 2(g_{12} y_{xh} + g_{13} y_{hz} + g_{23} y_{zx}) = 0 \\ & g_{11}(z_{xx} + f z_x) + g_{22}(z_{xx} + y z_x) + g_{33}(z_{xx} + q z_x) + 2(g_{12} z_{xh} + g_{13} z_{hz} + g_{23} z_{zx}) = 0 \end{aligned} \qquad \text{(3-27)}$$

其中

$$g_{ij} = \sum_{m=1}^{3} A_{mi} A_{mj}$$

A_{mi}是矩陣 M 中位於(m,i)元素的 cofactor

$$M = \begin{bmatrix} x_x & x_h & x_z \\ y_x & y_h & y_z \\ z_x & z_h & z_z \end{bmatrix} \qquad \text{(3-28)}$$

$$f = \frac{J^2 p}{g_{11}} y = \frac{J^2 p}{g_{22}} q = \frac{J^2 p}{g_{33}} \qquad \text{(3-29)}$$

而其中J 為賈氏轉換(Jacobian Transformation),

$$J = \begin{vmatrix} x_x & x_h & x_z \\ y_x & y_h & y_z \\ z_x & z_h & z_z \end{vmatrix} \qquad \text{(3-30)}$$

解偏微分法雖然具有網格線平滑、傾向正交且絕不會重疊的優點，但由於需經過疊代的過程，因此有速度慢、不易控制點分佈的缺點。

由於代數法與解偏微分法各有其利弊，因此以代數法作格點分佈預測，得到一組符合需求的粗糙網格後，再經由解偏微分法作循環計算來平滑網格的分佈，是較合實際的方法。

值得注意的，代數法中多方向內插網格點法(Transfinite Interpolation)與解偏微分法中之解橢圓形方程式格點法由於在近十年來發展成熟，已成為現今結構性網格點生成法之主流。 然而解拋物線型方程式格點法與解雙曲線型方程式格點法，由於強調簡單的格點預測和具有求解速度快的優點，雖技術尚未完全成熟，但未來的發展不容忽視。