2.2 結構性網格的生成(Structured Grid Generation)

2.2.1 二維結構性網格點生成步驟

結構性網格之生成方法大致有二種：一是代數法、一是偏微分法。代數法的優點是速度快，但是網格不平滑，可能重疊(overlap)或扭曲(skew)；偏微分法其網格較平滑、絕不重疊，且比較傾向正交，但是速度慢，所以綜合二法，先以代數法產生較粗略網格，再以偏微分法修改為較平滑之網格。

網格點生成之基本要求是在一個具有四個邊界的區域內建立網格點，使得任意兩條同族的網格線不相交，且所有的網格點均在區域內部或邊界上。其基本概念如圖2-4所示，應用一對一映射(mapping)關係，將分割好之物理域(physical domain)邊界映射到分配網(distribution mesh)，利用分配網與計算域(computational domain)算出物理域格點位置。

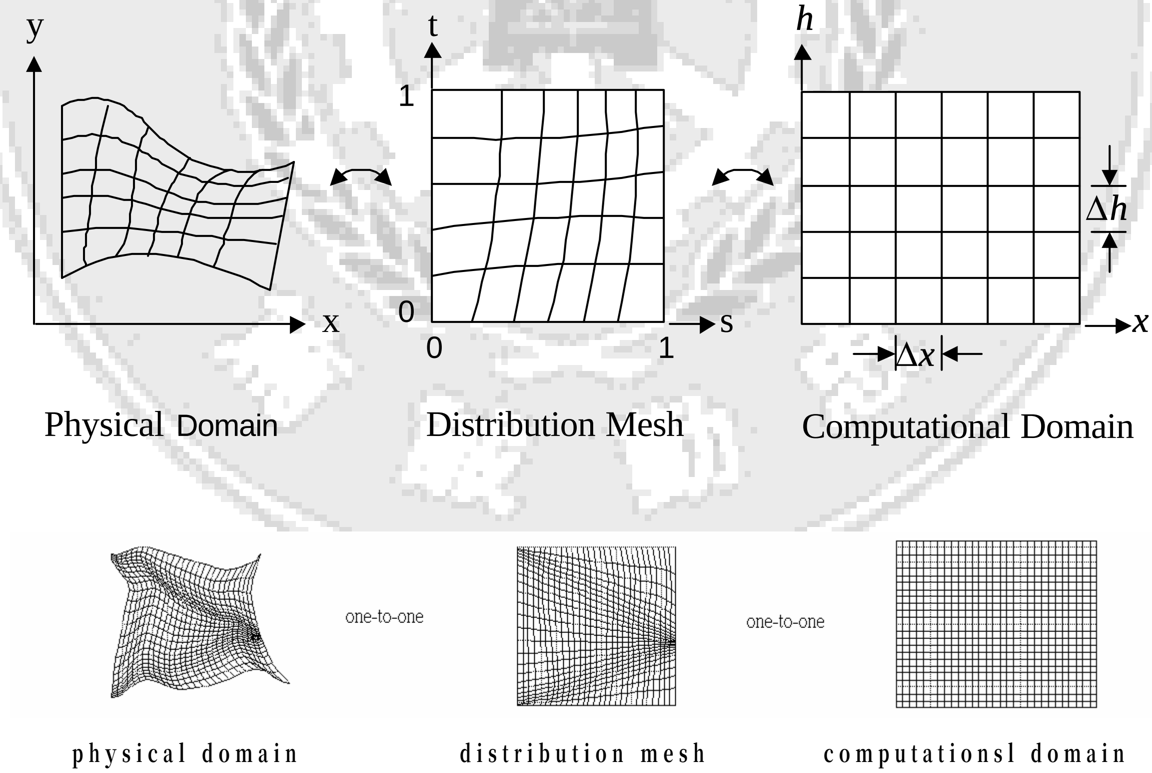

圖 2-4 成一對一關係之物理域、分配網及計算域

故其詳細處理步驟可分列如下：

1.物理域邊界之分割：

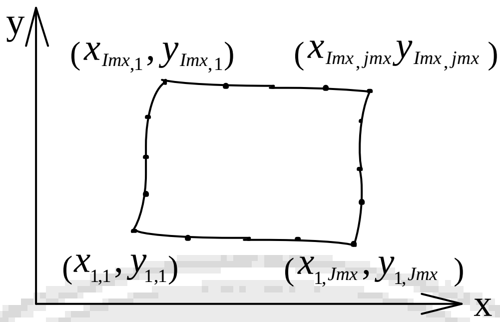

圖 2-5 物理域邊界之分割

如圖2-5所示，將物理域之邊界依照所需分割份數先行分割與記錄如下。

$$
\begin{aligned}
&(x_{i1}, y_{i1}) \quad , i = 1,2,\cdots,Imx \\
&(x_{iJmx}, y_{iJmx}), i = 1,2,\cdots,Imx \\
&(x_{1j}, y_{1j}) \quad , j = 1,2,\cdots,Jmx \\
&(x_{Imxj}, y_{Imxj}), j = 1,2,\cdots,Jmx
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

2.物理域邊界弧長之正規化 (normalizing arc length)：

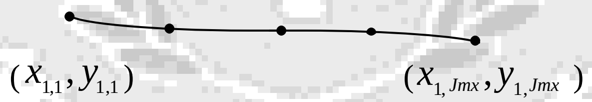

圖 2-6 物理域邊界弧長之無因次化

如圖2-6所示，將分割完成之物理域邊界，經由下列弧長之正規化公式

$$
r_i = \frac{\sum_{k=2}^{i} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}}{\sum_{k=2}^{max} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}} \qquad (2)
$$

其中 $i = 2, 3, \cdots, max$，$r_1 = 0$，可得圖4所示之分配網邊界。

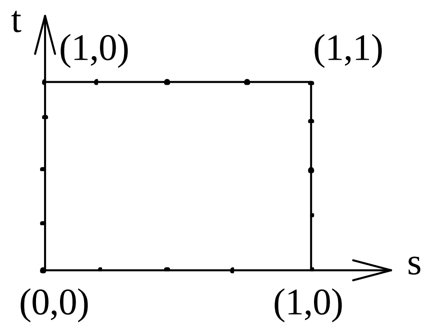

圖 2-7 正規化後之分配網邊界

從步驟1中之邊界點座標經正規化化所得之四個邊界正規化弧長為

$$\left(s_{1j}, t_{1j}\right) \quad , j = 1,2,\cdots, Jmx \qquad (3)$$

$$\left(s_{Imx\,j}, t_{Imx\,j}\right), \; j = 1,2,\cdots, Jmx$$

3.分配網(distribution mesh)：

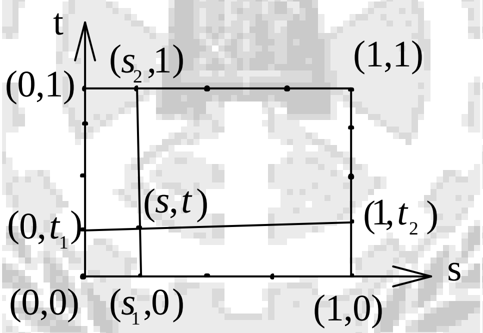

圖 2-8 分配網之交點

分配網是用來定義物理域格點之分配情形，將邊界上正規化的點以直線連接，即形成分配網，其中分配網之交點可由線性內插法求得。如圖2-8所示，交點座標可表示為

$$s = \frac{s_1 + t_1(s_2 - s_1)}{1 - (s_2 - s_1)(t_2 - t_1)}$$

$$t = \frac{t_1 + s_1(t_2 - t_1)}{1 - (s_2 - s_1)(t_2 - t_1)} \qquad (4)$$

4.物理域分割曲線數學式：

由分配網之各點座標, 配合下列各種曲線的描述方法, 計有 Linear , Lagrange , Hermite , Bazier , B-Spline**等數種數學曲線處理方式。由彼等方式可決定物理域內部的各點座標， 可寫為**

$$\left(x_{ij}, y_{ij}\right) \tag{5}$$

其中 $2 \le i \le Imx - 1 \ \ and \ \ 2 \le j \le Jmx - 1$。

以上各種方法通常均使用二維三次曲線參數式來決定x， y**座標，表示為下列式子**

$$r(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$$
$$r(x) = \left(x(x), y(x)\right)$$

$$x(x) = a_x\, x^3 + b_x\, x^2 + c_x\, x + d_x$$
$$y(x) = a_y\, x^3 + b_y\, x^2 + c_y\, x + d_y$$

就內插方式來說一般可分為單向內插法和雙向內插法：

(i)單向內插法－以Lagrange法為例

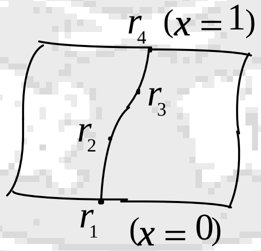

圖2-9 說明以四點決定一曲線之Lagrange法示意圖

Lagrange內插法以四點表示的公式為

$$\underset{\sim}{r}(x) = \sum_{n=1}^{4} f_n(x)\, \underset{\sim}{r}(x_n) \tag{7}$$

其中

$$f_n(x)=\prod_{l=1}^{4}\frac{(x-x_l)}{(x_n-x_l)} \quad ,l\neq n, \tag{8}$$

關係式(7)若以曲線參數式來表式可為

$$\underset{\sim}{r}(x)=ax^3+bx^2+cx+d \tag{9}$$

如圖2-9所示，將四點之座標值代入後可得

$$\begin{aligned}
&\underset{\sim}{r}(0)=d=\underset{\sim 1}{r}\\
&\underset{\sim}{r}(x_2)=ax_2^{\ 3}+bx_2^{\ 2}+cx_2+d=\underset{\sim 2}{r}\\
&\underset{\sim}{r}(x_3)=ax_3^{\ 3}+bx_3^{\ 2}+cx_3+d=\underset{\sim 3}{r}\\
&\underset{\sim}{r}(1)=a+b+c+d=\underset{\sim 4}{r}
\end{aligned} \tag{10}$$

其矩陣表示式為：

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ x_2^{\ 3} & x_2^{\ 2} & x_2 & 1\\ x_3^{\ 3} & x_3^{\ 2} & x_3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underset{\sim 1}{r}\\ \underset{\sim 2}{r}\\ \underset{\sim 3}{r}\\ \underset{\sim 4}{r}\end{bmatrix} \tag{11}$$

所以可以計算出係數 a, b, c, d，表示為

$$a=\frac{1}{\Delta}\Big[\underset{\sim 1}{r}\left(x_2^{\ 2}x_3-x_2x_3^{\ 2}-x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+x_2-x_3\right)$$

$$+\underset{\sim 2}{r}\left(x_3-x_3^{\ 2}\right)+\underset{\sim 3}{r}\left(x_2^{\ 2}-x_2\right)+\underset{\sim 4}{r}\left(x_2x_3^{\ 2}-x_2^{\ 2}x_3\right)\Big]$$

$$b=\frac{1}{\Delta}\Big[\underset{\sim 1}{r}\left(x_2x_3^{\ 3}-x_2^{\ 3}x_3+x_2^{\ 3}-x_3^{\ 3}-x_2+x_3\right)$$

$$+\underset{\sim 2}{r}\left(x_3^{\ 3}-x_3\right)+\underset{\sim 3}{r}\left(x_2-x_2^{\ 3}\right)+\underset{\sim 4}{r}\left(x_2^{\ 3}x_3-x_2x_3^{\ 3}\right)\Big]$$

$$c=\frac{1}{\Delta}\Big[\underset{\sim 1}{r}\left(x_2^{\ 3}x_3^{\ 2}-x_2^{\ 2}x_3^{\ 3}+x_3^{\ 3}-x_2^{\ 3}+x_2^{\ 2}-x_3^{\ 2}\right)$$

$$+\underset{\sim 2}{r}\left(x_3^{\ 2}-x_3^{\ 3}\right)+\underset{\sim 3}{r}\left(x_2^{\ 3}-x_2^{\ 2}\right)+\underset{\sim 4}{r}\left(x_2^{\ 2}x_3^{\ 3}-x_2^{\ 3}x_3^{\ 2}\right)\Big]$$

$$d = \underset{\sim 1}{r} \tag{12}$$

其中 $\Delta = \left(x_2{}^2 x_3{}^3 - x_2{}^3 x_3{}^2 + x_2{}^3 x_3 - x_2 x_3{}^3 - x_2{}^2 x_3 + x_2 x_3{}^2 \right)$，如此關係式(9)可完全決定。

(ii)雙向內插法(Transfinite interpolation)

設平面上任一點之座標 $\underset{\sim}{r}(x,h) = \left(x(x,h), y(x,h) \right)$，若以 $x-$方向之內插法參數式來表示

$$\underset{\sim}{r}(x,h) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \underset{\sim}{r}(x_n, h) \tag{13a}$$

則與整個邊界 $x=0$和 $x=1$吻合(match)。若以 $h-$方向之內插法參數式來表示

$$\underset{\sim}{r}(x,h) = \sum_{m=1}^{M} y_m(h) \underset{\sim}{r}(x, h_m) \tag{13b}$$

則與四個頂點吻合。

由關係式(13a),(13b),(14)結合而成 Transfinite interpolation的形式為

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{r}(x,h) &= \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \underset{\sim}{r}(x_n, h) + \sum_{m=1}^{M} y_m(h) \underset{\sim}{r}(x, h_m) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} f_n(x) y_m(h) \underset{\sim}{r}(x_n, h_m) \end{aligned} \tag{15}$$

如此便與物理域之所有邊界完全吻合。